

УДК 550.831

## ВЕЙВЛЕТЫ ПУАССОНА В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ПЛОЩАДНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

© 2017 К.М. Кузнецов, А.А. Булычев

*Кафедра геофизических методов исследования земной коры Геологического факультета  
МГУ имени М.В. Ломоносова, 119991;  
e-mail: kirillkuz90@gmail.com*

Изучены возможности применения вейвлетов, построенных на основе ядра Пуассона, для обработки и интерпретации площадных потенциальных полей. Анализируя их вейвлет-спектр возможно определить положение особых точек. Также по вейвлет-спектру возможно вычисление трансформант исходного сигнала и его фильтрация на основе алгоритмов обратного вейвлет-преобразования.

*Ключевые слова: потенциальные поля, вейвлеты Пуассона, вейвлет-преобразования.*

### ОСНОВЫ ПЛОЩАДНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

На сегодняшний день один из наиболее часто используемых подходов в обработке потенциальных полей основан на их представлении тригонометрическими рядами Фурье. В то же время в различных областях науки все больше значение приобретают вейвлет-преобразования сигналов. В работах различных авторов продемонстрированы возможности локализации особых точек профильных потенциальных полей и их трансформаций на основе вейвлетов, построенных на основе ядра Пуассона (Кузнецов и др., 2015; Оболенский, Булычев, 2011; Утемов и др., 2010).

При работе с площадными гравитационными и магнитными полями могут быть использованы результаты разложения функций на трехпараметрические вейвлеты. В общем виде непрерывное вейвлет-преобразование будет описываться сверткой следующего вида (Юдин и др., 2001):

$$W(a_x, a_y, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) \psi_{a_x, a_y, x, y}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1)$$

Функция  $W(a_x, a_y, x, y)$  является вейвлет-спектром функции  $g(\xi, \eta)$ . Сам вейвлет  $\psi_{a_x, a_y, x, y}(\xi, \eta)$  получается из базисного (материнского) вейвлета  $\psi_0(\xi, \eta)$ :

$$\psi_{a_x, a_y, x, y}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{a_x} \sqrt{a_y}} \psi_0\left(\frac{\xi - x}{a_x}, \frac{\eta - y}{a_y}\right), \quad (2)$$

где  $a_x$  и  $a_y$  — масштабные коэффициенты,  $x$  и  $y$  — параметры сдвига вейвлет-преобразования. Функция  $\psi_0(\xi, \eta)$  должна удовлетворять определенным требованиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(\xi)|^2 d\xi d\eta < \infty. \quad (3)$$

Для анализа сигналов потенциальных полей можно использовать вейвлеты, построенные на основе ядра Пуассона, как его частные производные:

$$K^{nx, ny, nz}(x, y, z) = \frac{\partial^{nx+ny+nz}}{\partial^{nx} x \partial^{ny} y \partial^{nz} z} \left( \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right). \quad (4)$$

В таком случае нормировочные коэффициенты  $a_x$  и  $a_y$  следует принять равными и в дальнейшем обозначать как  $h$ . Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\psi_{h, x, y}(\xi, \eta) = \frac{1}{h} \psi_0\left(\frac{\xi - x}{h}, \frac{\eta - y}{h}\right). \quad (5)$$

Ядро Пуассона (4), соответствующее вычислению первой вертикальной производной на высоте  $z$  представляется соотношением:

$$K(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} \right). \quad (6)$$

Положив  $z = 1$  и опустив множитель  $(1/2\pi)$  можно записать базисный вейвлет:

$$\psi_0^z(\xi, \eta) = \frac{2 - \xi^2 - \eta^2}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1})^5}. \quad (7)$$

На его основе можно построить вейвлеты Пуассона первого порядка, соответствующие второй вертикальной производной потенциала притяжения:

$$\begin{aligned} \psi_{h,x,y}^z(\xi, \eta) &= \frac{1}{h} \psi_0 \left( \frac{\xi - x}{h}, \frac{\eta - y}{h} \right) = \\ &= \frac{1}{h} h^3 \frac{2h^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{(\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + h^2})^5}. \end{aligned} \quad (8)$$

Стоит отметить, что на основе выражения (4) можно построить функции аналогичные (8), соответствующие горизонтальным производным потенциала. В частности, можно записать:

$$\psi_{h,x,y}^x(\xi, \eta) = \frac{1}{h} h^3 \frac{3h(\xi - x)}{(\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + h^2})^5}. \quad (9)$$

Могут быть построены вейвлеты и более высоких порядков.

Если исходная функция  $g(\xi, \eta)$  имеет среднее значение равное нулю и ее вейвлет-спектр был получен путем свертки с осесимметричными вейвлетами удовлетворяющими условиям (3), то можно, выполнив обратное непрерывное вейвлет-преобразование, по функции  $W(h, x, y)$  восстановить исходный сигнал  $g(\xi, \eta)$  по формуле:

$$g(x, y) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{h^3} \left( \frac{1}{h} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty W(h, x, y) \psi_0 \left( \frac{\xi - x}{h}, \frac{\eta - y}{h} \right) d\xi d\eta \right) dh, \quad (10)$$

$C_\psi$  — константа, определяемая функцией  $\psi_0$ :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}_0(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \quad (11)$$

где  $\hat{\psi}_0(\omega)$  — Фурье-образ функции  $\psi_0(x, y)$ .

Стоит отметить, что обратным вейвлет-преобразованием с вейвлетами Пуассона, отвечающими горизонтальным производным невозможно восстановить исходную функцию (Кузнецов, Булычев, 2017). В результате применения данных вейвлетов и уравнения (10) могут быть вычислены трансформанты поля, зависящие от типа вейвлета.

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Объемные вейвлет-спектры позволяют судить о положении особых точек аномальных потенциальных полей. Рассмотрим модель точечного источника на глубине 50 м. Анализируя

результаты вейвлет-преобразования с вейвлетом Пуассона, соответствующим вертикальной производной (8) (рис. 1) можно отметить, что координаты экстремума вейвлет-спектра, совпадают с положением точечного источника.

Теперь рассмотрим гравитационный эффект от той же модели. Сравнивая вертикальные срезы вейвлет-спектров, проходящие через источник и полученные при помощи вейвлет-преобразования поля  $V_z$  вейвлетом (8) с различными масштабными коэффициентами (рис. 2), можно отметить, что экстремум вейвлет-спектра совпадает с положением источника, если исходный

масштабный коэффициент умножить на  $1/\sqrt{h}$ .

Таким образом для локализации центра масс аномалий гравитационного поля лучше использовать масштабный коэффициент  $1/h^{3/2}$ . Также этот факт может быть теоретически доказан.

## ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС И НАМАГНИЧЕННОСТИ, СОЗДАЮЩИХ ИСХОДНОЕ ПОЛЕ

Пусть функция  $g(x, y)$  представляет из себя аномальное гравитационное поле, которое создается распределением плотности  $\sigma(h, \xi, \eta)$  в нижнем полупространстве. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= G \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \sigma(h, \xi, \eta) \times \\ &\times \frac{h}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + h^2}} dh d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная.

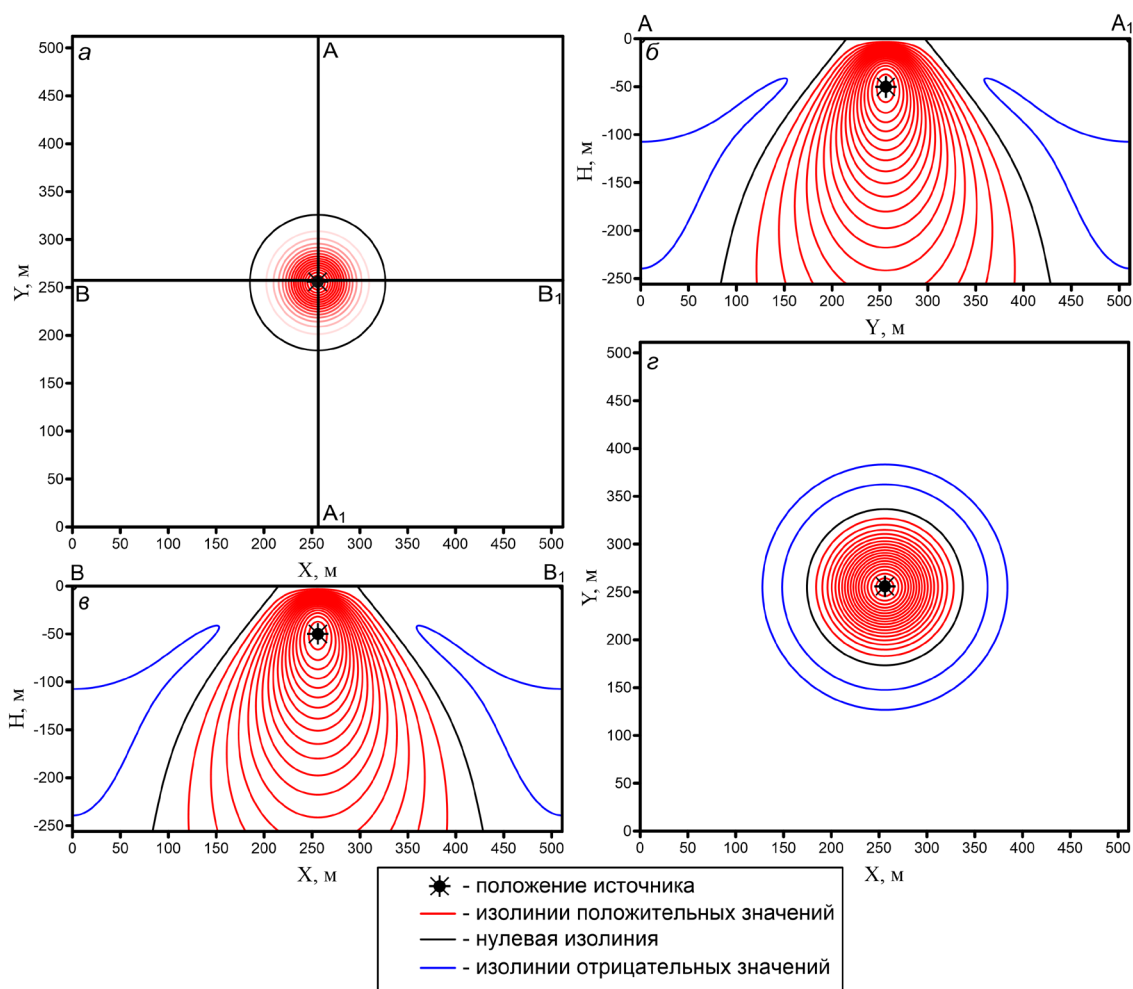
Вейвлет-спектр площадного гравитационного поля можно связать с эквивалентным распределением плотностей. Определим функцию  $\rho(h, x, y)$ , которая связана с исходным полем  $g(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \rho(h, x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(h, \xi, \eta) \times \\ &\times \frac{2h^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + h^2}} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

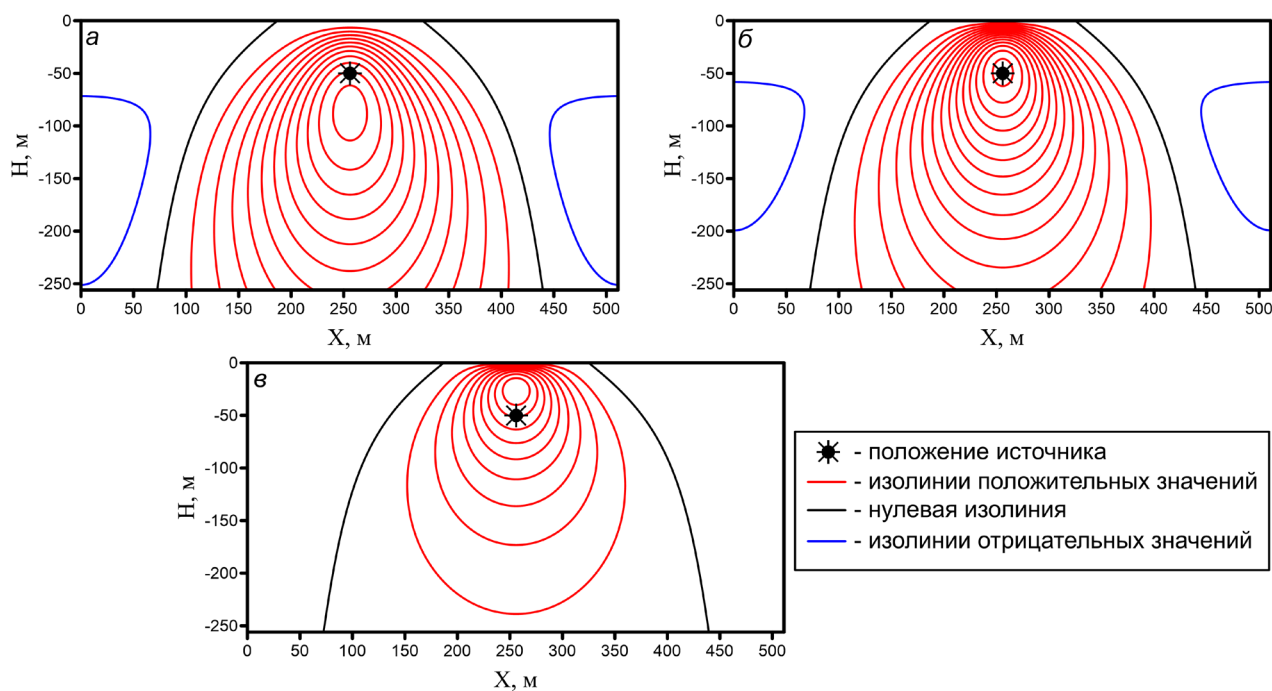
Это выражение совпадает с вычислением первой вертикальной производной на уровне  $h$  (Гравиразведка, 1990). В частотной области это выражение можно записать как:

$$\hat{\rho}(h, \omega_x, \omega_y) = \hat{g}(\omega_x, \omega_y) \left( |\omega| e^{-|\omega|h} \right), \quad (14)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$



**Рис. 1.** Результаты вейвлет-преобразования поля  $\Delta Z$  точечного источника вейвлетом Пуассона первого порядка (8): *a* — исходное поле  $\Delta Z$ ; *б* — срез вейвлет-спектра по линии  $AA_1$ ; *в* — срез вейвлет-спектра по линии  $BB_1$ ; *г* — срез вейвлет-спектра на уровне 50 м.



**Рис. 2.** Срез вейвлет-спектра поля  $V_z$  точечного источника, полученного в результате вейвлет-преобразования (8) с масштабными коэффициентами: *a* —  $1/h$ ; *б* —  $1/h^{3/2}$ ; *в* —  $1/h^2$ .

Придадим функции  $\rho(h, x, y)$  смысл распределения плотности и рассчитаем эффект  $f(x, y)$  от него. В частотной области он будет иметь вид:

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = G \int_0^\infty \hat{\rho}(h, \omega_x, \omega_y) \times \\ \times (2\pi e^{-|w|h}) dh = \pi G \hat{g}(\omega_x, \omega_y) \quad (15)$$

Таким образом получается, что функция

$$\delta(h, x, y) = \frac{1}{\pi G} \rho(h, x, y) \quad \text{описывает такое распределение}$$

плотности, которое создает исходное поле  $g(x, y)$  (Кобрунов, Варфоломеев, 1981). Функцию  $\rho(h, x, y)$  можно связать с вейвлет-спектром  $W(h, x, y)$ , полученным вейвлетом (8) соотношением:

$$\rho(h, x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{h^3} W(h, x, y). \quad (16)$$

Тогда эквивалентное распределение плотности  $\delta(h, x, y)$ , которое создает поле  $g(x, y)$  может быть описано следующим образом:

$$\delta(h, x, y) = \frac{1}{\pi G} \rho(h, x, y) = \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{h^3} \frac{1}{\pi G} W(h, x, y) = \frac{1}{2\pi^2 h^2 G} W(h, x, y). \quad (17)$$

Рассмотрим еще один способ пересчета вейвлет-спектра в плотности. Пусть функция  $g(x, y)$  представляет из себя вертикальную производную гравитационного поля  $V_{zz}$ , которая создается плотностным распределением  $\sigma(h, \xi, \eta)$  в нижнем полупространстве (Гравиразведка, 1990):

$$g(x, y) = G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \sigma(h, \xi, \eta) \times \\ \times \frac{2h^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + h^2}^5} dh d\xi d\eta. \quad (18)$$

Если исходное поле было разложено на вейвлет-спектр вейвлетом Пуассона 1-го порядка, отвечающим вертикальной производной, то оно может быть восстановлено обратным вейвлет-преобразованием (10), и тогда можно записать:

$$g(x, y) = G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \delta(h, \xi, \eta) \times \\ \times \frac{2h^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + h^2}^5} dh d\xi d\eta, \quad (19)$$

где

$$\delta(h, \xi, \eta) = \frac{1}{GC_\psi h} W(h, x, y). \quad (20)$$

Таким образом функция  $\delta(h, \xi, \eta)$  описывает такое пространственное распределение плотности, эффект  $V_{zz}$  от которого совпадает с исходной

функцией  $g(x, y)$ . На основе предложенного подхода возможно построить алгоритмы пересчета в плотности в предположении, что исходная функция соответствует еще более высоким производным потенциала. Стоит отметить, что оба предложенных способа позволяют получить лишь эквивалентные истинному распределения плотности, которые не несут в себе явного геологического смысла.

Рассмотрим гравитационное поле модели, состоящей из призмы и точечного источника, при предположении, что оно является полем  $V_{zz}$  (рис. 3). Среднее квадратическое расхождение между исходным полем и вычисленным составило менее 1%.

Такой же подход используем и для расчета куба эквивалентных намагниченностей для магнитного поля. Пусть функция  $g(x, y)$  соответствует вертикальной составляющей аномального магнитного поля  $Z(x, y)$ , которая создается распределением вертикальной намагниченности  $I(h, x, y)$ . Тогда можно записать:

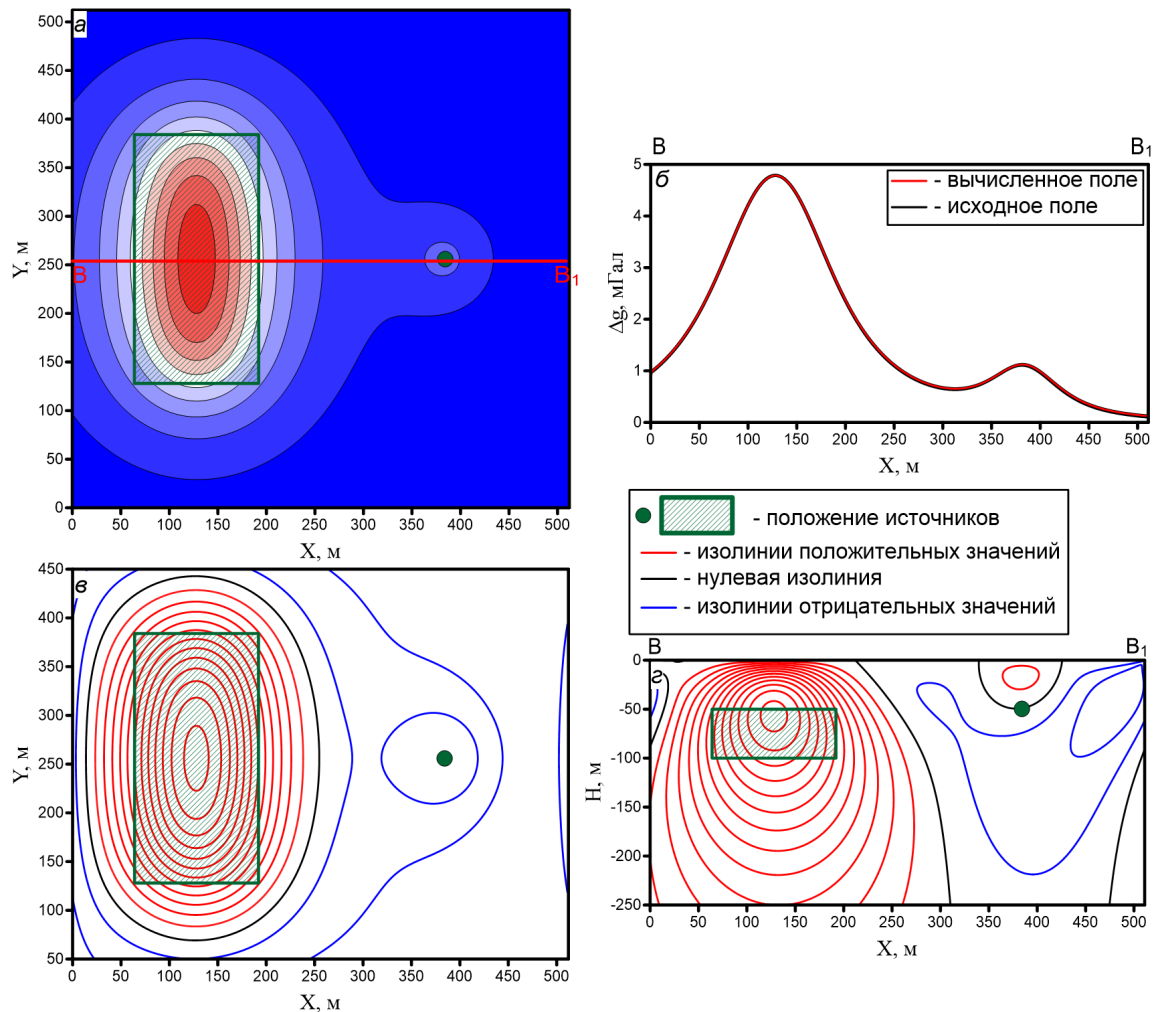
$$Z(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty I(h, \xi, \eta) \times \\ \times \frac{2h^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + h^2}^5} dh d\xi d\eta. \quad (21)$$

Если сравнить данное выражение (21) с выражением для обратного вейвлет-преобразования (10), то можно записать:

$$I(h, \xi, \eta) = \frac{1}{C_\psi h} W(h, x, y). \quad (22)$$

## ПРОДОЛЖЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЛЯ В ВЕРХНЕМ И НИЖНЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ

Решение этих задач основано на том, что по результатам вейвлет-преобразования с помощью вейвлетов Пуассона  $W(h, x, y)$  можно определить эквивалентное распределение плотности или намагниченности (16, 20, 22) в нижнем полупространстве, создающее исходное поле. Затем можно рассчитать значения поля или его производные на заданной высоте. Таким образом, можно реализовать продолжение поля в верхнее полупространство. В качестве примера рассмотрим гравитационное поле четырех точечных источников, расположенных на глубинах 30, 50, 70 и 90 м (рис. 4). Их эффект с нулевого уровня был пересчитан на высоту 30 м и сравнен с полем силы тяжести, создаваемой этой моделью на высоте 30 м. Максимальное расхождение полей составляет 0.02 мГал при амплитуде поле 1.93 мГал, что составляет примерно 1%, и визуально, эта разница на рисунке не заметна.



**Рис. 3.** Расчет куба эквивалентных плотностей: *а* — исходное гравитационное поле; *б* — графики гравитационного поля и рассчитанного поля  $V_{zz}$  по линии BB<sub>1</sub>; *в* — горизонтальный срез куба плотностей на уровне 50 м; *г* — горизонтальный срез куба плотностей по линии BB<sub>1</sub>.

В случае пересчета вниз между уровнем исходного поля и пересчета при таком подходе могут оказаться массы. Обнулив эти значения функции до необходимого уровня пересчета можно рассчитать прямой гравитационный (магнитный) эффект на заданном уровне. При решении этой задачи исходный сигнал предпочтительней рассматривать как поле, соответствующее более высоким частным производным гравитационного потенциала, чем поле  $V_z$ , например, как поле  $V_{zzzz}$ . В этом случае эффективные массы окажутся расположенными на больших глубинах по сравнению со случаем применения вейвлетов первого порядка.

#### ФИЛЬТРАЦИЯ ПЛОЩАДНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТОВ ПУАССОНА

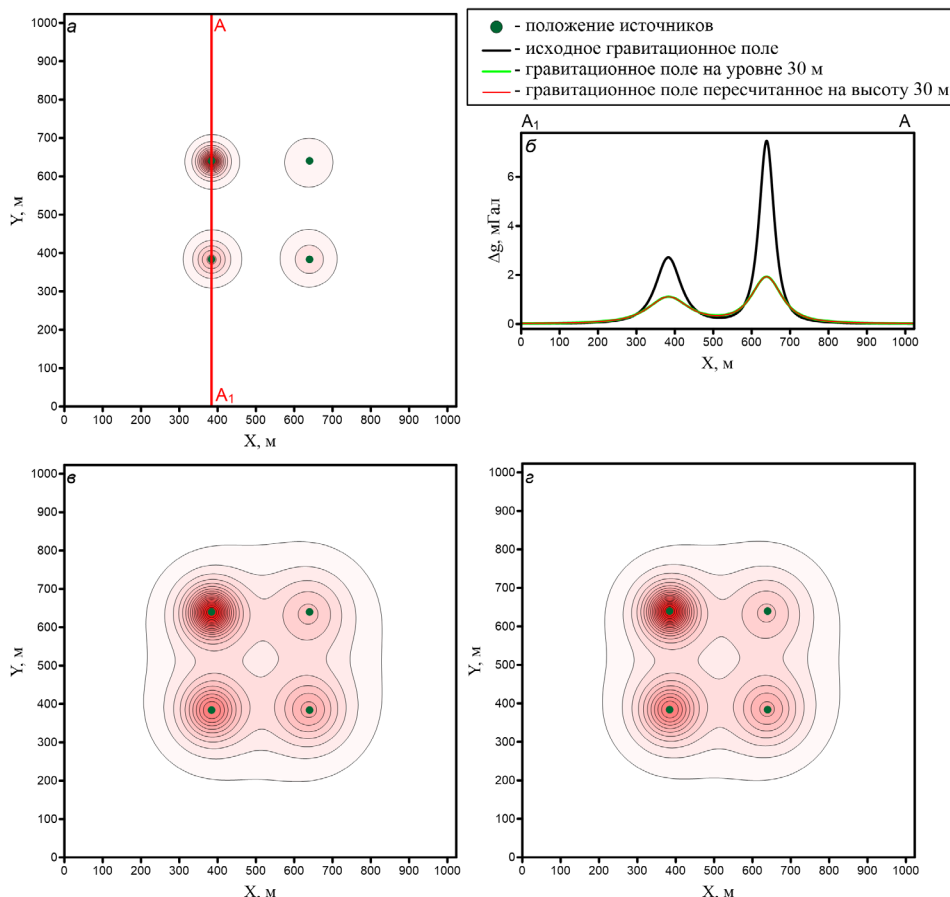
Одной из важнейших задач при интерпретации потенциальных полей является

разделение полей на составляющие, которые характеризуют определенные изучаемые объекты. По значениям вейвлет-спектра  $W(h, x, y)$  можно восстановить исходную функцию  $g(x, y)$  путем обратного вейвлет-преобразования (10). Таким образом задача фильтрации поля (сигнала) может решаться путем различных трансформаций и фильтраций самого вейвлет-спектра. Рассмотрим модельное гравитационное поле вытянутой призмы и точечного источника (рис. 5а) расположенных на глубине 50 м. К исходному сигналу добавлен высокочастотный шум. Результаты фильтрации исходного модельного поля путем замены первых 15 уровней вейвлет-спектра на среднее значение спектра на данном уровне показали, что таким образом удалось избавиться от высокочастотной составляющей (рис. 5).

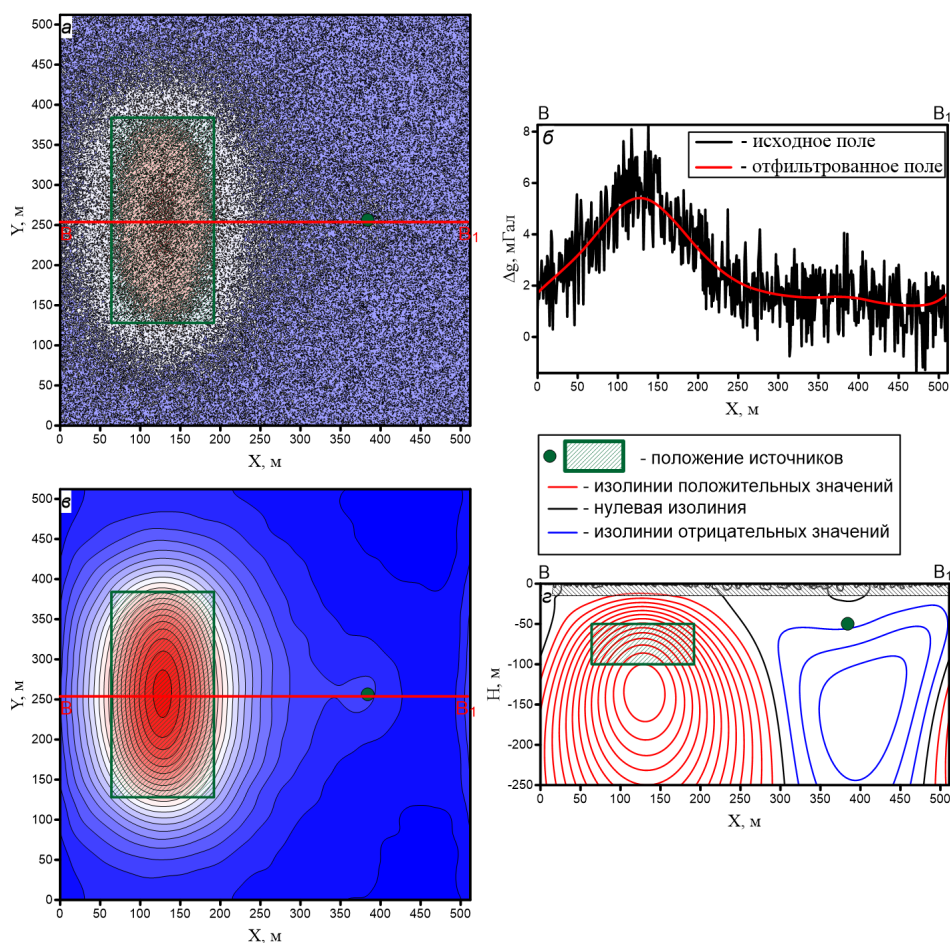
Наряду с вейвлетами Пуассона описанный подход к фильтрации сигналов потенциальных полей может быть построен и на вейвлетах других типов.



# ВЕЙВЛЕТЫ ПУАССОНА



**Рис. 4.** Пересчет гравитационного поля от 4-точечных источников на высоту 30 м: *a* — исходное гравитационное поле; *б* — графики гравитационного поля по линии AA<sub>1</sub>; *в* — гравитационное поле, рассчитанное на высоте 30 м; *г* — гравитационное поле, пересчитанное на высоту 30 м.



**Рис. 5.** Результат низкочастотной фильтрации модельного поля на основе замены первых 15 рядов вейвлет-спектра: *a* — исходное гравитационное поле; *б* — графики гравитационного поля до и после фильтрации по линии BB<sub>1</sub>; *в* — отфильтрованное гравитационное поле; *г* — вертикальный срез вейвлет-спектра с отмеченными заменами на константу рядами.

## Список литературы

- Гравиразведка. Справочник геофизика / Под редакцией Е.А. Мудрецов и К.Е. Веселова. М.: Недра, 1990. 607 с.
- Кобрунов А.И., Варфоломеев В.А. Об одном методе  $\varepsilon$ -эквивалентных перераспределений и его использовании при интерпретации гравитационных полей // Известия АН СССР. Физика Земли. 1981. № 10. С. 25–44.
- Кузнецов К.М., Булычев А.А. Анализ двумерных потенциальных полей на основе вейвлетов Пуассона // Материалы 44-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. М.: ИФЗ РАН, 2017. С. 174–177.
- Кузнецов К.М., Оболенский И.В., Булычев А.А. Трансформации потенциальных полей на основе непрерывного вейвлет-преобразования // Вестник Московского университета. Серия 4: Геология. 2015. № 6. С. 61–70.
- Оболенский И.В., Булычев А.А. Применение комплексного непрерывного вейвлет-преобразования Пуассона для определения источников аномалий потенциальных полей // Геофизические исследования. 2011. Т. 12. № 3. С. 5–21.
- Утемов Э.В., Нургалиев Д.К., Хамидуллина Г.С. Технология обработки и интерпретации гравиметрических данных на основе «естественного» вейвлет-преобразования // Ученые записки Казанского университета. 2010. Т. 152. Кн. 3. С. 208–222.
- Юдин М.Н., Фарков Ю.А., Филатов Д.М. Введение в вейвлет-анализ. М.: МГГА, 2001. 72 с.

## PROCESSING OF AREA POTENTIAL FIELDS USING POISSON WAVELETS

K.M. Kuznetsov<sup>1</sup>, A.A. Bulychev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Geophysical department of Lomonosov Moscow State University Geological Faculty,  
119991, Moscow; e-mail: kirillkuz90@gmail.com*

The article describes a possibility of applying wavelets based on the Poisson kernel for processing and interpretation the area potential fields. The analysis of their wavelet-spectrum allows determining the position of sources. It is also possible to reconstruct or calculate the transformants of the original signal using the inverse wavelet transform of the wavelet-spectrum.

*Keywords: Potential fields, Poisson wavelets, wavelet transforms.*